COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD DES SURFACES DE KLEIN

Frédéric Butin

▶ To cite this version:

Frédéric Butin. COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD DES SURFACES DE KLEIN. 2008. hal-00266435v2

HAL Id: hal-00266435

https://hal.science/hal-00266435v2

Preprint submitted on 26 Apr 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD DES SURFACES DE KLEIN

Frédéric BUTIN[1]

Résumé

Etant donné un système physique $(M,\, \mathcal{F}(M))$, où M est une variété de Poisson et $\mathcal{F}(M)$ l'algèbre des fonctions régulières sur M, il est important de pouvoir le quantifier pour obtenir des résultats plus corrects que ceux donnés par la mécanique classique. Une solution est fournie par la quantification par déformation qui consiste à construire un star-produit sur l'algèbre des séries formelles $\mathcal{F}(M)[[\hbar]]$. Un premier pas vers l'étude des star-produits est le calcul de la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{F}(M)$.

Le but de l'article est de déterminer cette cohomologie de Hochschild dans le cas des courbes singulières du plane — on précise ainsi, par une démarche différente, un résultat démontré par Fronsdal — et dans le cas des surfaces de Klein. L'utilisation d'un complexe proposé par Kontsevich et l'emploi des bases de Gröbner permettent de résoudre le problème.

Abstract

Given a mechanical system $(M,\, \mathcal{F}(M))$, where M is a Poisson manifold and $\mathcal{F}(M)$ the algebra of regular functions on M, it is important to be able to quantize it, in order to obtain more precise results than through classical mechanics. An available method is the deformation quantization, which consists in constructing a star-product on the algebra of formal power series $\mathcal{F}(M)[[\hbar]]$. A first step toward study of star-products is the calculation of Hochschild cohomology of $\mathcal{F}(M)$.

The aim of this article is to determine this Hochschild cohomology in the case of singular curves of the plane — so we rediscover, by a different way, a result proved by Fronsdal and make it more precise — and in the case of Klein surfaces. The use of a complex suggested by Kontsevich and the help of Gröbner bases allow us to solve the problem.

Mots-clés

cohomologie ; Hochschild ; surfaces de Klein ; bases de Gröbner ; quantification ; star-produits.

hal-00266435, version 2 - 26 Apr 2008

Table des matières

[1] butin@math.univ-lyon1.fr

1 Introduction

1.1 Quantification par déformation

On considère un système physique donné par une variété de Poisson M, munie du crochet de Poisson $\{\cdot\}$. En mécanique classique, on étudie l'algèbre (commutative) $\mathcal{F}(M)$ des fonctions régulières (ie, par exemple, $\mathcal{C}^\infty$, holomorphes ou polynomiales) sur M, c'est-à-dire des observables de la mécanique classique. Or la mécanique quantique, où le système physique est décrit par une algèbre (non commutative) d'opérateurs sur un espace de Hilbert, donne des résultats plus corrects que son analogue classique. D'où l'intérêt d'obtenir une description quantique du système classique $(M, \mathcal{F}(M))$: une telle opération s'appelle une quantification. Une des solutions est la quantification géométrique qui permet de construire explicitement un espace de Hilbert et une algèbre d'opérateurs sur cet espace. Cette méthode, fort intéressante, a l'inconvénient de ne pas toujours s'appliquer. C'est pourquoi on a introduit d'autres quantifications telles la quantification asymptotique et la quantification par déformation. Cette dernière, décrite en 1978 par F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer dans l'article [BFFLS78], constitue une bonne alternative : au lieu de construire une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert, il s'agit d'obtenir une déformation formelle de $\mathcal{F}(M)$, donnée par l'algèbre des séries formelles $\mathcal{F}(M)[[\hbar]]$, munie du star-produit associatif (mais non commutatif)

$$f * g = \sum_{j=0}^{\infty} m_j(f, g)\hbar^j \tag{1}$$

où les applications m_j sont bilinéaires et où $m_0(f, g) = fg$. La quantification est alors donnée par l'application $f \mapsto \widehat{f}$, où $\widehat{f}(g) = f * g$.
On peut se demander dans quels cas une variété de Poisson admet une telle quantification. Une réponse a été donnée par Kontsevich dans son article [K97] : il a en effet construit un star-produit sur toute variété de Poisson. En outre, il a démontré que si M est une variété lisse, alors les classes d'équivalence de déformations formelles du crochet de Poisson nul sont en bijection avec les classes d'équivalence de star-produits. De plus, d'après le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg, tout star-produit abélien est trivial.
Dans le cas où M est une variété algébrique singulière, de la forme

$$M = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \ / \ f(\mathbf{z}) = 0\}$$

avec $n = 2$ ou 3, où f est un polynôme de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ — et c'est le cas que nous étudions dans la suite — les fonctions régulières à considérer sont les fonctions polynomiales sur M, dont l'algèbre s'identifie à l'algèbre quotient $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f \rangle$. Le résultat énoncé précédemment n'est donc plus applicable. Cependant, les déformations de l'algèbre $\mathcal{F}(M)$, définies par la formule (1), sont toujours classifiées par la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{F}(M)$, et on se trouve ainsi ramené à l'étude de la cohomologie de Hochschild de $\mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle f \rangle$.

1.2 Cohomologies et quotients d'algèbres de polynômes

Dans la suite, on considère $R = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] = \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ l'algèbre des polynômes à coefficients complexes et à n indéterminées. On fixe aussi $f_1, \ldots, f_m$ m éléments de R, et on définit l'algèbre quotient $A := R \ / \ \langle f_1, \ldots, f_m \rangle = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] \ / \ \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$.

Plusieurs articles ont été consacrés à l'étude de cas particuliers :

C. Roger et P. Vanhaecke, dans l'article [RV02], considèrent le cas où $n = 2$ et $m = 1$, et où f_1 est un polynôme homogène. Après avoir rappelé la définition de la cohomologie de Poisson, ils la calculent en fonction du nombre de composantes irréductibles du lieu singulier $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 \;/\; f_1(\mathbf{z}) = 0\}$ (dans ce cas, on a une structure symplectique en dehors du lieu singulier).

M. Van den Bergh et A. Pichereau, dans les articles [VB94], [P05] et [P06], s'intéressent au cas où $n = 3$ et $m = 1$, et où f_1 est un polynôme quasi-homogène à singularité isolée en l'origine. Ils présentent le calcul de l'homologie et de la cohomologie de Poisson, qui s'exprime en particulier en fonction du nombre de Milnor de l'espace $\mathbb{C}[z_1,\, z_2,\, z_3] \;/\; \langle \partial_{z_1} f_1,\, \partial_{z_2} f_1,\, \partial_{z_3} f_1 \rangle$.

En s'intéressant toujours au cas où $n = 3$ et $m = 1$, dans l'article [AL98], J. Alev et T. Lambre comparent l'homologie de Poisson en degré 0 des surfaces de Klein à l'homologie de Hochschild en degré 0 de $A_1(\mathbb{C})^G$, où $A_1(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Weyl et G le groupe associé à la surface.

Quant à C. Fronsdal, il étudie dans l'article [FK07] l'homologie et la cohomologie de Hochschild dans deux cas particuliers : le cas où $n = 1$ et $m = 1$, et le cas où $n = 2$ et $m = 1$. De plus, l'appendice de cet article donne un autre moyen de calculer la cohomologie de Hochschild dans le cas plus général des intersections complètes.

Dans cet article, on se propose de calculer la cohomologie de Hochschild dans deux cas particulièrement intéressants : le cas des courbes singulières du plan, avec des polynômes f_1 qui correspondent à leurs formes normales (ce cas a déjà retenu l'intérêt de C. Fronsdal) ; et le cas des surfaces de Klein ($n = 3$ et $m = 1$). Ces dernières ont fait l'objet d'un nombre important de travaux ; leur rapport aux sous-groupes finis de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, aux solides de Platon, et à la correspondance de McKay explique cet intérêt manifeste. Par ailleurs, les algèbres préprojectives, dont il est question dans l'article [CBH98], constituent une famille de déformations des surfaces de Klein, paramétrée par le groupe qui leur est associé, ce qui motive encore le calcul de leur cohomologie.
Le résultat principal de l'article est donné par les deux propriétés :

Propriété 1
Soit une courbe singulière du plan, définie par un polynôme $f_1 \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, de type A_k, D_k ou E_k. Alors $H^0 \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] \,/\, \langle f_1 \rangle$, $H^1 \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] \,/\, \langle f_1 \rangle \,\oplus\, \mathbb{C}^k$, et pour tout $j \geq 2$, $H^j \simeq \mathbb{C}^k$.

Propriété 2
Soient Γ un sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ et $f_1 \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ tel que $\mathbb{C}[x,\, y]^\Gamma \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] \,/\, \langle f_1 \rangle$. Alors $H^0 \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] \,/\, \langle f_1 \rangle$, $H^1 \simeq \nabla f_1 \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}] \,/\, \langle f_1 \rangle)^3 \,\oplus\, \mathbb{C}^\mu$, $H^2 \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] \,/\, \langle f_1 \rangle \,\oplus\, \mathbb{C}^\mu$, et pour tout $j \geq 3$, $H^j \simeq \mathbb{C}^\mu$, où μ est le nombre de Milnor de $\mathcal{X}_\Gamma$.

Pour calculer explicitement ces espaces de cohomologie, on s'appuiera sur la démarche proposée par M. Kontsevich dans l'appendice de [FK07], démarche que l'on développera.
On étudiera d'abord le cas des courbes singulières du plan dans le paragraphe 3 : on utilisera cette méthode pour retrouver le résultat que C. Fronsdal a établi par des calculs directs. Puis on l'affinera en déterminant les dimensions des espaces de cohomologie au moyen de la division multivariée et des bases de Gröbner.
Puis, dans le paragraphe 4, on considérera le cas des surfaces de Klein ($\mathcal{X}_\Gamma = \mathbb{C}^2 \,/\, \Gamma$, avec Γ sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$). On démontrera d'abord que H^0 s'identifie à l'espace des fonctions polynomiales sur la surface singulière $\mathcal{X}_\Gamma$. On poursuivra en montrant que H^1 et H^2 sont de dimension infinie. On déterminera aussi, pour j supérieur ou égal à 3, la dimension de H^j, en montrant qu'elle est égale au nombre de Milnor de la surface $\mathcal{X}_\Gamma$.
Avant l'étude de ces deux cas, le paragraphe 1.3 rappelle des résultats importants sur les déformations.

1.3 Cohomologie de Hochschild et déformations d'algèbres

• Etant donné une $\mathbb{C}-$algèbre associative, notée A, le complexe de Hochschild associé à A est le complexe

$$C^0(A) \xrightarrow{d_0} C^1(A) \xrightarrow{d_1} C^2(A) \xrightarrow{d_2} C^3(A) \xrightarrow{d_3} C^4(A) \xrightarrow{d_4} \cdots$$

dont l'espace $C^p(A)$ des $p-$cochaînes est défini par $C^p(A) = 0$ pour $p \in -\mathbb{N}^*$, $C^0(A) = A$ et $\forall\ p \in \mathbb{N}^*,\ C^p(A) = L(A^{\otimes p},\ A)$, où $L(A^{\otimes p},\ A)$ désigne l'espace des applications $\mathbb{C}-$linéaires de $A^{\otimes p}$ dans A, et dont la différentielle $d = \bigoplus_{i=0}^{\infty} d_p$ est donnée par la formule

$$\forall\ f \in C^p(A),\ d_p\, f(a_0, \ldots, a_p) = a_0 f(a_1, \ldots, a_p) - \sum_{i=0}^{p-1} f(a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_p) + (-1)^{p-1} f(a_0, \ldots, a_{p-1}) a_p,$$

$$\text{c'est-à-dire } d_p f = (-1)^{p+1}[\mu,\ f]_G,$$

où μ est la multiplication de l'algèbre A, et $[\cdot]_G$ le crochet de Gerstenhaber.
On définit alors la cohomologie de Hochschild de A comme la cohomologie du complexe de Hochschild associé à A. On note $HH^0(A) = \mathrm{Ker}\ d_0$ et $\forall\ p \in \mathbb{N}^*,\ HH^p(A) = \mathrm{Ker}\ d_p\ /\ \mathrm{Im}\ d_{p-1}$.

• On note $\mathbb{C}[[\hbar]]$ (resp. $A[[\hbar]]$) l'algèbre des séries formelles en l'indéterminée $\hbar$, à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. A). Une déformation de l'algèbre A est définie comme une application m de $A[[\hbar]] \times A[[\hbar]]$ dans $A[[\hbar]]$ qui est $\mathbb{C}[[\hbar]]-$bilinéaire et telle que

$$\begin{array}{l} \forall\ (s,\ t) \in A[[\hbar]]^2, \quad m(s,\ t) \equiv st \mod \hbar A[[\hbar]], \\ \forall\ (s,\ t,\ u) \in A[[\hbar]]^3, \quad m(s,\ m(t,\ u)) = m(m(s,\ t),\ u). \end{array}$$

Cela signifie qu'il existe une suite d'applications bilinéaires m_j de $A \times A$ dans A dont le premier terme m_0 est le produit de A et telle que

$$\begin{array}{l} \forall\ (a,\ b) \in A^2,\ m(a,\ b) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} m_j(a,\ b)\hbar^j, \\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{i+j=n} m_i(a,\ m_j(b,\ c)) = \sum_{i+j=n} m_i(m_j(a,\ b),\ c),\ \text{c'est-à-dire } \sum_{i+j=n} m_i \bullet m_j = 0, \end{array}$$

en utilisant le produit de Gerstenhaber, noté $\bullet$.
On parle de déformation d'ordre p si la formule précédente est vérifiée (seulement) pour $n \leq p$.
Deux déformations m et m' de A sont dites équivalentes s'il existe un $\mathbb{C}[[\hbar]]-$automorphisme de $A[[\hbar]]$, noté φ, tel que

$$\begin{array}{l} \forall\ (s,\ t) \in A[[\hbar]]^2,\ \varphi(m(s,\ t)) = m'(\varphi(s),\ \varphi(t)) \\ \forall\ s \in A[\hbar],\ \varphi(s) \equiv s \mod \hbar A[[\hbar]], \end{array}$$

c'est-à-dire s'il existe une suite d'applications linéaires φ_j de A dans A dont le premier terme φ_0 est l'identité de A et telle que

$$\begin{array}{l} \forall\ a \in A,\ \varphi(a) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(a)\hbar^j, \\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{i+j=n} \varphi_i(m_j(a,\ b)) = \sum_{i+j+k=n} m'_i(\varphi_j(a),\ \varphi_k(b)). \end{array}$$

• Un des intérêts de la cohomologie de Hochschild est de permettre de paramétrer les déformations de l'algèbre A. En effet, si $\pi \in C^2(A)$, on peut construire une déformation m d'ordre 1 de A telle que $m_1 = \pi$ si et seulement si $\pi \in \mathrm{Ker}\, d_2$. De plus, deux telles déformations sont équivalentes si et seulement si leur différence est un élément de $\mathrm{Im}\, d_1$. Ainsi, l'ensemble des classes de déformations d'ordre 1 est en bijection avec $HH^2(A)$.

Si m est une déformation d'ordre p, alors on peut étendre m en une déformation d'ordre $p+1$ si et seulement s'il existe m_{p+1} tel que

$$\forall\ (a,\, b,\, c) \in A^3,\ \underbrace{\sum_{i=1}^{p} (m_i(a,\, m_{p+1-i}(b,\, c)) - m_i(m_{p+1-i}(a,\, b),\, c))}_{\omega_p(a,\, b,\, c)} = -d_2\, m_{p+1}(a,\, b,\, c),$$

$$\text{ie} \sum_{i=1}^{p} m_i \bullet m_{p+1-i} = d_2 m_{p+1}.$$

Or le terme ω_p appartient à $\operatorname{Ker} d_3$, donc $HH^3(A)$ représente les obstructions au prolongement d'une déformation d'ordre p en une déformation d'ordre $p+1$.

2 Présentation du complexe de Koszul

On rappelle dans ce paragraphe les résultats sur le complexe de Koszul qui sont donnés dans l'appendice de l'article [FK07].

2.1 Théorème de Kontsevich et notations

• Comme indiqué au paragraphe 1.2, on considère $R = \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ et $(f_1,\, \ldots,\, f_m) \in R^m$, et on note $A = R \,/\, \langle f_1,\ \ldots,\ f_m\rangle$. On suppose qu'il y a *intersection complète*, ie la dimension de l'ensemble des solutions du système $\{f_1 = \cdots = f_m = 0\}$ est $n - m$.

• On définit aussi la superalgèbre supercommutative $\widetilde{A} = R \otimes \bigwedge\{\alpha_j,\ j = 1 \ldots m\} = \mathbb{C}[z_1,\ \ldots,\ z_n,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m]$.
On introduit ensuite $\eta_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$ et $b_j = \frac{\partial}{\partial \alpha_j}$.
On note les variables paires avec des lettres latines et les variables impaires avec des lettres grecques.

• On considère l'algèbre différentielle graduée

$$\widetilde{T} = A[\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n,\ b_1,\ \ldots,\ b_m] = \frac{\mathbb{C}[z_1,\ \ldots,\ z_n]}{\langle f_1,\ \ldots,\ f_m\rangle}[\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n,\ b_1,\ \ldots,\ b_m],$$

munie de la différentielle

$$\boxed{d_{\widetilde{T}} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial z_j} b_i \frac{\partial}{\partial \eta_j}}$$

et de la graduation de Hodge, définie par $deg(z_i) = 0,\ deg(\eta_i) = 1,\ deg(\alpha_j) = -1,\ deg(b_j) = 2.$

On peut alors énoncer le théorème principal qui permet le calcul de la cohomologie de Hochschild :

Théorème 3 *(Kontsevich)*
Sous les hypothèses précédentes, la cohomologie de Hochschild de A est isomorphe à la cohomologie du complexe $(\widetilde{T},\ d_{\widetilde{T}})$ défini par l'algèbre différentielle graduée $\widetilde{T}$.

• Il n'y a pas d'élément de degré strictement négatif. On a donc le complexe suivant :

$$\widetilde{T}(0) \xrightarrow{\widetilde{0}} \widetilde{T}(1) \xrightarrow{d_{\widetilde{T}}^{(1)}} \widetilde{T}(2) \xrightarrow{d_{\widetilde{T}}^{(2)}} \widetilde{T}(3) \xrightarrow{d_{\widetilde{T}}^{(3)}} \widetilde{T}(4) \xrightarrow{d_{\widetilde{T}}^{(4)}} \cdots$$

Pour chaque degré p, on choisit une base $\mathcal{B}_p$ de $\widetilde{T}(p)$. Par exemple pour $p = 0\dots 3$, on prend :

$\widetilde{T}(0) = A$
$\widetilde{T}(1) = A\eta_1 \oplus \cdots \oplus A\eta_n$
$\widetilde{T}(2) = Ab_1 \oplus \cdots \oplus Ab_m \oplus \bigoplus_{i<j} A\,\eta_i\eta_j$
$\widetilde{T}(3) = \bigoplus_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} A\,b_i\eta_j \oplus \bigoplus_{i<j<k} A\,\eta_i\eta_j\eta_k$

On peut alors expliciter les matrices $Mat_{\mathcal{B}_p,\,\mathcal{B}_{p+1}}(d^{(p)}_{\widetilde{T}})$.

• On note $p\ :\ \mathbb{C}[\mathbf{z}] \to A = \mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f_1, \dots,\ f_m\rangle$ la projection canonique.
Pour tout idéal J de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$, on notera J_A l'image de cet idéal par la projection canonique.
De même, si $(g_1, \dots,\ g_r) \in A^r$ on notera $\langle g_1, \dots,\ g_r\rangle_A$ l'idéal de A engendré par $(g_1, \dots,\ g_r)$.
Par ailleurs, si $g \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, et si J est un idéal de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$, alors on note

$$Ann_J(g) := \{h \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]\ /\ hg = 0 \mod J\}.$$

En particulier, g ne divise pas 0 dans $\mathbb{C}[\mathbf{z}]/J$ si et seulement si $Ann_J(g) = J$.
Enfin, pour tout polynôme $g \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, on note ∇g son gradient.

2.2 Cas particulier où $n = 1$ et $m = 1$

• Dans le cas où $n = 1$ et $m = 1$, d'après ce qui précède, on a pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\widetilde{T}(2p) = Ab_1^p} \text{ et } \boxed{\widetilde{T}(2p+1) = Ab_1^p\eta_1.}$$

On en déduit
$H^0 = A$, $H^1 = \{g_1\eta_1\ /\ g_1 \in A \text{ et } g_1\,\partial_{z_1} f_1 = 0\}$
et $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$, $H^{2p} = \dfrac{Ab_1^p}{\{g_1(\partial_{z_1} f_1)b_1^p\ /\ g_1 \in A\}}$, et $H^{2p+1} = \{g_1\,b_1^p\eta_1\ /\ g_1 \in A \text{ et } g_1\,\partial_{z_1} f_1 = 0\}$.

• Si maintenant $f_1 = z_1^k$, alors

$H^0 = A = \mathbb{C}[z_1]\ /\ \langle z_1^k\rangle \simeq \mathbb{C}^{k-1}$
$H^1 = \{g_1\eta_1\ /\ g_1 \in A \text{ et } kg_1z_1^{k-1} = 0\} \simeq \mathbb{C}^{k-1}$
et $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$, $H^{2p} = \dfrac{Ab_1^p}{\{g_1(kz_1^{k-1})b_1^p\ /\ g_1 \in A\}} \simeq \mathbb{C}^{k-1}$
et $H^{2p+1} = \{g_1\,b_1^p\eta_1\ /\ g_1 \in A \text{ et } kg_1z_1^{k-1} = 0\} \simeq \mathbb{C}^{k-1}$.

3 Cas $n = 2,\ m = 1$. — courbes singulières du plan

3.1 Description des espaces de cohomologie

On utilise le théorème 3 pour calculer la cohomologie de Hochschild de A. On commence par expliciter les cochaînes et les différentielles.

• Les différents espaces du complexe sont donnés par

$$\begin{array}{l|l}
\widetilde{T}(0) = A & \widetilde{T}(5) = Ab_1^2\eta_1 \oplus Ab_1^2\eta_2 \\
\widetilde{T}(1) = A\eta_1 \oplus A\eta_2 & \widetilde{T}(6) = Ab_1^3 \oplus Ab_1^2\eta_1\eta_2 \\
\widetilde{T}(2) = Ab_1 \oplus A\eta_1\eta_2 & \widetilde{T}(7) = Ab_1^3\eta_1 \oplus Ab_1^3\eta_2 \\
\widetilde{T}(3) = Ab_1\eta_1 \oplus Ab_1\eta_2 & \widetilde{T}(8) = Ab_1^4 \oplus Ab_1^3\eta_1\eta_2 \\
\widetilde{T}(4) = Ab_1^2 \oplus Ab_1\eta_1\eta_2 & \widetilde{T}(9) = Ab_1^4\eta_1 \oplus Ab_1^4\eta_2,
\end{array}$$

ie, dans le cas général, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\widetilde{T}(2p) = Ab_1^p \oplus Ab_1^{p-1}\eta_1\eta_2}$ et $\boxed{\widetilde{T}(2p+1) = Ab_1^p\eta_1 \oplus Ab_1^p\eta_2}$.

On a $\frac{\partial}{\partial \eta_k}(\eta_k \wedge \eta_l) = 1 \wedge \eta_l = -\eta_l \wedge 1$, donc $d_{\widetilde{T}}^{(2)}(\eta_k\eta_l) = -\frac{\partial f_1}{\partial z_k} b_1\eta_l + \frac{\partial f_1}{\partial z_l} b_1\eta_k$.
On note désormais $\frac{\partial}{\partial_{z_j}} = \partial_{z_j} = \partial_j$.

Les matrices de $d_{\widetilde{T}}$ sont donc données par

$$Mat_{\mathcal{B}_{2p},\mathcal{B}_{2p+1}}(d_{\widetilde{T}}^{(2p)}) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_2 f_1 \\ 0 & -\partial_1 f_1 \end{pmatrix}$$
$$Mat_{\mathcal{B}_{2p+1},\mathcal{B}_{2p+2}}(d_{\widetilde{T}}^{(2p+1)}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• On en déduit une expression plus simple des espaces de cohomologie :

$H^0 = A$
$H^1 = \{g_1\eta_1 + g_2\eta_2 \ / \ (g_1,\, g_2) \in A^2 \text{ et } g_1\,\partial_1 f_1 + g_2\,\partial_2 f_1 = 0\} \simeq \left\{\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2 \ / \ \mathbf{g}\cdot\nabla f_1 = 0\right\}$
$\forall\, p \in \mathbb{N}^*$,

$$H^{2p} = \frac{\{g_1 b_1^p + g_2 b_1^{p-1}\eta_1\eta_2 \ / \ (g_1,\, g_2)\in A^2 \text{ et } g_2\,\partial_1 f_1 = g_2\,\partial_2 f_1 = 0\}}{\{(g_1\,\partial_1 f_1 + g_2\,\partial_2 f_1) b_1^p \ / \ (g_1,\, g_2)\in A^2\}} \simeq \frac{\left\{\mathbf{g}=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2 \ / \ g_2\,\partial_1 f_1 = g_2\,\partial_2 f_1 = 0\right\}}{\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{g}\cdot\nabla f_1 \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ \mathbf{g}\in A^2\right\}}$$
$$\simeq \frac{A}{\langle \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1\rangle_A} \oplus \{g \in A \ / \ g\,\partial_1 f_1 = g\,\partial_2 f_1 = 0\}$$
$$H^{2p+1} = \frac{\{g_1 b_1^p\eta_1 + g_2 b_1^p \eta_2 \ / \ (g_1,\, g_2)\in A^2 \text{ et } g_1\,\partial_1 f_1 + g_2\,\partial_2 f_1 = 0\}}{\{g_2(\partial_2 f_1 b_1^p\eta_1 - \partial_1 f_1 b_1^p\eta_2) \ / \ g_2\in A\}} \simeq \frac{\left\{\mathbf{g}=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2 \ / \ \mathbf{g}\cdot\nabla f_1 = 0\right\}}{\left\{g_2\begin{pmatrix} \partial_2 f_1 \\ -\partial_1 f_1 \end{pmatrix} \ / \ g_2\in A\right\}}.$$

Il reste à déterminer explicitement ces espaces. C'est l'objet des deux paragraphes suivants.

3.2 Calculs explicites dans le cas particulier où f_1 est à variables séparées

Dans ce paragraphe, on considère le polynôme $f_1 = a_1 z_1^k + a_2 z_2^l$, avec $2 \le l \le k$ et $(a_1,\, a_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$.
Les dérivées partielles de f_1 sont $\partial_1 f_1 = k a_1 z_1^{k-1}$ et $\partial_2 f_1 = l a_2 z_2^{l-1}$.

• On a déjà
$$H^0 = \mathbb{C}[z_1,\, z_2]/\langle a_1 z_1^k + a_2 z_2^l\rangle.$$

• De plus, comme f_1 est quasi-homogène, la formule d'Euler donne $\dfrac{1}{k}x_1\partial_1 f_1 + \dfrac{1}{l}x_2\partial_2 f_1 = f_1$. Ainsi, on a l'inclusion $\langle f_1\rangle \subset \langle \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1\rangle$, donc $\frac{A}{\langle \partial_{z_1} f_1,\, \partial_{z_2} f_1\rangle_A} \simeq \frac{\mathbb{C}[z_1,\, z_2]}{\langle \partial_{z_1} f_1,\, \partial_{z_2} f_1\rangle} \simeq Vect\left(z_1^i z_2^j \ / \ i \in [\![0,\, k-2]\!],\ j \in [\![0,\, l-2]\!]\right)$.
Or $\partial_1 f_1$ et f_1 sont premiers entre eux, de même que $\partial_2 f_1$ et f_1, donc si $g \in A$ vérifie $g\partial_1 f_1 = 0 \mod \langle f_1\rangle$, alors $g \in \langle f_1\rangle$, ie g est nul dans A.
Ainsi,
$$H^{2p} \simeq Vect\left(z_1^i z_2^j \ / \ i \in [\![0,\, k-2]\!],\ j \in [\![0,\, l-2]\!]\right) \simeq \mathbb{C}^{(k-1)(l-1)}.$$

• On détermine maintenant l'ensemble $\left\{\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in A^2 \ / \ \mathbf{g}\cdot\nabla f_1 = 0\right\}$:
On a d'abord $\langle f_1,\, \partial_1 f_1\rangle = \langle a_1 z_1^k + a_2 z_2^l,\, z_1^{k-1}\rangle = \langle z_2^l,\, z_1^{k-1}\rangle$. Les seuls monômes qui ne sont pas dans cet idéal sont donc les éléments $z_1^i z_2^j$ avec $i \in [\![0,\, k-2]\!]$ et $j \in [\![0,\, l-1]\!]$.

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ peut donc s'écrire sous la forme

$$P = \alpha f_1 + \beta \partial_1 f_1 + \sum_{\substack{i=0\ldots k-2 \\ j=0\ldots l-1}} a_{ij} z_1^i z_2^j.$$

Les polynômes $P \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ tels que $P\partial_2 f_1 \in \langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle$ sont donc les éléments

$$P = \alpha f_1 + \beta \partial_1 f_1 + \sum_{\substack{i=0\ldots k-2 \\ j=1\ldots l-1}} a_{ij} z_1^i z_2^j.$$

On a ainsi calculé $Ann_{\langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle}(\partial_2 f_1)$.
L'équation

$$\mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = 0 \mod \langle f_1 \rangle \tag{2}$$

entraîne

$$g_2 \partial_2 f_1 = 0 \mod \langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle, \tag{3}$$

ie $g_2 \in Ann_{\langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle}(\partial_2 f_1)$, ie encore

$$g_2 = \alpha f_1 + \beta \partial_1 f_1 + \sum_{\substack{i=0\ldots k-2 \\ j=1\ldots l-1}} a_{ij} z_1^i z_2^j, \tag{4}$$

avec $(\alpha,\, \beta) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]^2$.
Il s'ensuit que

$$g_1 \partial_1 f_1 + \alpha f_1 \partial_2 f_1 + \beta \partial_1 f_1 \partial_2 f_1 + \sum_{\substack{i=0\ldots k-2 \\ j=1\ldots l-1}} a_{ij} z_1^i z_2^j \partial_2 f_1 \in \langle f_1 \rangle. \tag{5}$$

Et, avec l'égalité $z_2 \partial_2 f_1 = l f_1 - \frac{l}{k} z_1 \partial_1 f_1$,

$$\partial_1 f_1 \left(g_1 + \beta \partial_2 f_1 - \frac{l}{k} \sum_{\substack{i=0\ldots k-2 \\ j=1\ldots l-1}} a_{ij} z_1^{i+1} z_2^{j-1} \right) \in \langle f_1 \rangle. \tag{6}$$

Comme f_1 et $\partial_1 f_1$ sont premiers entre eux, cette équation équivaut à

$$g_1 = -\beta \partial_2 f_1 + \frac{l}{k} \sum_{\substack{i=0\ldots k-2 \\ j=1\ldots l-1}} a_{ij} z_1^{i+1} z_2^{j-1} + \delta f_1,$$

avec $\delta \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$.
On vérifie ensuite que les éléments g_1 et g_2 ainsi obtenus sont bien solutions de l'équation (2).
Finalement, on a

$$\{\mathbf{g} \in A^2 \;/\; \mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix} f_1 - \beta \begin{pmatrix} \partial_2 f_1 \\ -\partial_1 f_1 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{i=0\ldots k-2 \\ j=1\ldots l-1}} a_{ij} z_1^i z_2^{j-1} \begin{pmatrix} \frac{l}{k} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Big/ \; (\alpha,\, \beta,\, \delta) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]^3 \text{ et } a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

On en déduit aussitôt les espaces de cohomologie d'indices impairs :

$$\begin{array}{rcl} \forall\, p \geq 1,\; H^{2p+1} & \simeq & \mathbb{C}^{(k-1)(l-1)} \\ H^1 & \simeq & \mathbb{C}^{(k-1)(l-1)} \oplus \mathbb{C}[z_1,\, z_2]/\langle a_1 z_1^k + a_2 z_2^l \rangle. \end{array}$$

Remarque 4
On obtient en particulier la cohomologie pour les cas où $f_1 = z_1^{k+1} + z_2^2$, $f_1 = z_1^3 + z_2^4$ et $f_1 = z_1^3 + z_2^5$, cas qui correspondent respectivement aux fonctions quasi-homogènes de types A_k, E_6 et E_8 données dans [AVGZ86] p. 181.

On regroupe ces trois cas particuliers dans le tableau ci-dessous :

	H^0	H^1	H^{2p}	H^{2p+1}
A_k	$\mathbb{C}[\mathbf{z}]\ /\ \langle z_1^{k+1}+z_2^2\rangle$	$\mathbb{C}[\mathbf{z}]\ /\ \langle z_1^{k+1}+z_2^2\rangle \oplus \mathbb{C}^k$	$\mathbb{C}^k$	$\mathbb{C}^k$
E_6	$\mathbb{C}[\mathbf{z}]\ /\ \langle z_1^3+z_2^4\rangle$	$\mathbb{C}[\mathbf{z}]\ /\ \langle z_1^3+z_2^4\rangle \oplus \mathbb{C}^6$	$\mathbb{C}^6$	$\mathbb{C}^6$
E_8	$\mathbb{C}[\mathbf{z}]\ /\ \langle z_1^3+z_2^5\rangle$	$\mathbb{C}[\mathbf{z}]\ /\ \langle z_1^3+z_2^5\rangle \oplus \mathbb{C}^8$	$\mathbb{C}^8$	$\mathbb{C}^8$

Les cas où $f_1 = z_1^2 z_2 + z_2^{k-1}$ et $f_1 = z_1^3 + z_1 z_2^3$, ie respectivement D_k et E_7, sont étudiés dans le paragraphe suivant.

3.3 Calculs explicites pour D_k et E_7

Pour étudier ces cas particuliers, on utilise le résultat suivant sur les bases de Gröbner :

Définition 5
Pour $g \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$, on note $lt(g)$ son terme dominant (pour l'ordre lexicographique).
Soit J un idéal de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ et $G_J := [g_1,\, \ldots,\, g_r]$ une base de Gröbner de J. Un polynôme $p \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ est réduit relativement à G_J s'il est nul ou bien si aucun terme de p n'est divisible par le terme dominant $lt(g_j)$ de l'un des éléments de G_J.
L'ensemble des termes G_J-standards est l'ensemble des monômes de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ privé de l'ensemble des termes dominants $lt(f)$ des polynômes $f \in J\backslash\{0\}$.

Théorème 6 *(Macaulay)*
L'ensemble des termes G_J-standards forme une base de l'espace vectoriel quotient $\mathbb{C}[\mathbf{z}]\ /\ J$.

3.3.1 Cas de $f_1 = z_1^2 z_2 + z_2^{k-1}$, ie D_k

On a ici $f_1 = z_1^2 z_2 + z_2^{k-1}$, $\partial_1 f_1 = 2z_1 z_2$ et $\partial_2 f_1 = z_1^2 + (k-1)z_2^{k-2}$.
Une base de Gröbner de l'idéal $\langle f_1,\, \partial_2 f_1\rangle$ est $B := [b_1,\, b_2] = [z_1^2 + (k-1)z_2^{k-2},\, z_2^{k-1}]$.
L'ensemble des termes standards est donc $\{z_1^i z_2^j\ /\ i \in \{0,\, 1\}$ et $j \in [\![0,\, k-2]\!]\}$.
On peut alors résoudre l'équation $p\,\partial_1 f_1 = 0$ dans $\mathbb{C}[\mathbf{z}]\ /\ \langle f_1,\, \partial_2 f_1\rangle$.
En effet, en écrivant $p := \displaystyle\sum_{i=0,1 j=0\ldots k-2} a_{ij} z_1^i z_2^j$, l'équation devient

$$q := \sum_{i=0,1 j=0\ldots k-2} a_{ij} z_1^{i+1} z_2^{j+1} \in \langle f_1,\, \partial_2 f_1\rangle.$$

On cherche donc la forme normale de l'élément q modulo l'idéal $\langle f_1,\, \partial_2 f_1\rangle$.
La division multivariée de q par B s'écrit $q = q_1 b_1 + q_2 b_2 + r$ avec $r = \sum_{j=0}^{k-3} a_{0,j} z_1 z_2^{j+1}$.
La solution est donc

$$p = a_{0,k-2} z_2^{k-2} + \sum_{j=0}^{k-2} a_{1,j} z_1 z_2^j.$$

Or l'équation

$$\mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = 0 \mod \langle f_1\rangle \tag{7}$$

entraîne

$$g_1 \partial_1 f_1 = 0 \mod \langle f_1,\, \partial_2 f_1\rangle, \tag{8}$$

ie

$$g_1 = \alpha f_1 + \beta \partial_2 f_1 + a z_2^{k-2} + \sum_{j=0}^{k-2} b_j z_1 z_2^j, \tag{9}$$

avec $(\alpha,\, \beta) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]^2$ et $a,\, b_j \in \mathbb{C}$.
D'où

$$g_2 \partial_2 f_1 + \beta \partial_1 f_1 \partial_2 f_1 + a z_2^{k-2} \partial_1 f_1 + \sum_{j=0}^{k-2} b_j z_1 z_2^j \partial_1 f_1 \in \langle f_1 \rangle. \tag{10}$$

Et, avec les égalités $z_2^{k-1} = \frac{1}{2-k}(f_1 - z_2 \partial_2 f_1) = -\frac{1}{2-k} z_2 \partial_2 f_1 \mod \langle f_1 \rangle$, et $\frac{k-2}{2} z_1 \partial_1 f_1 + z_2 \partial_2 f_1 = (k-1) f_1$ (Euler), on obtient

$$\partial_2 f_1 \left(g_2 + \beta \partial_1 f_1 - \frac{2a}{2-k} z_1 z_2 + \sum_{j=0}^{k-2} b_j \frac{2}{2-k} z_2^{j+1} \right) \in \langle f_1 \rangle. \tag{11}$$

Mais f_1 et $\partial_2 f_1$ sont premiers entre eux, donc

$$g_2 = -\beta \partial_1 f_1 + \frac{2a}{2-k} z_1 z_2 - \sum_{j=0}^{k-2} b_j \frac{2}{2-k} z_2^{j+1} + \delta f_1,$$

avec $\delta \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$.
Donc

$$\left\{ \mathbf{g} \in A^2 \ / \ \mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix} f_1 + \beta \begin{pmatrix} \partial_2 f_1 \\ -\partial_1 f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2^{k-2} \\ \frac{2}{2-k} z_1 z_2 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{k-2} b_j z_2^j \begin{pmatrix} z_1 \\ -\frac{2}{2-k} z_2 \end{pmatrix} \Big/ \ (\alpha,\, \beta,\, \delta) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]^3 \text{ et } a,\, b_j \in \mathbb{C} \right\}.$$

Par ailleurs, une base de Gröbner de $\langle \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1 \rangle$ est $[z_1^2 + (k-1) z_2^{k-2},\, z_1 z_2,\, z_2^{k-1}]$,
donc $\mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1 \rangle \simeq Vect\left(z_1,\, 1,\, z_2\, \ldots,\, z_2^{k-2}\right)$.

En résumé,

$$\boxed{\begin{array}{l} H^0 = \mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^2 z_2 + z_2^{k-1} \rangle \\ H^1 \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^2 z_2 + z_2^{k-1} \rangle \oplus \mathbb{C}^k \\ H^{2p} \simeq \mathbb{C}^k \\ H^{2p+1} \simeq \mathbb{C}^k. \end{array}}$$

3.3.2 Cas de $f_1 = z_1^3 + z_1 z_2^3$, ie E_7

On a ici $\partial_1 f_1 = 3z_1^2 + z_2^3$ et $\partial_2 f_1 = 3 z_1 z_2^2$.
Une base de Gröbner de l'idéal $\langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle$ est $[3z_1^2 + z_2^3,\, z_1 z_2^3,\, z_2^6]$, et une base de Gröbner de $\langle \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1 \rangle$ est $[3z_1^2 + z_2^3,\, z_1 z_2^2,\, z_2^5]$.
Par une démonstration analogue, on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{l} H^0 = \mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^3 + z_1 z_2^3 \rangle \\ H^1 \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^3 + z_1 z_2^3 \rangle \oplus \mathbb{C}^7 \\ H^{2p} \simeq \mathbb{C}^7 \\ H^{2p+1} \simeq \mathbb{C}^7. \end{array}}$$

4 Cas $n = 3,\ m = 1$. — surfaces de Klein

4.1 Surfaces de Klein

Etant donné un groupe fini G agissant sur $\mathbb{C}^n$, on lui fait correspondre, selon le programme d'Erlangen de Klein, la variété quotient $\mathbb{C}^n/G$: c'est la variété dont les points sont les orbites sous l'action de G. Les fonctions polynomiales sur cette variété sont les fonctions polynomiales sur $\mathbb{C}^n$ invariantes par G.
Dans le cas de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$, la théorie des invariants permet d'associer à tout sous-groupe fini un polynôme. Ainsi, à tout sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ est associée la variété algébrique constituée des zéros de ce

polynôme, appelée surface de Klein.
On rappelle dans ce paragraphe quelques résultats sur ces surfaces. Voir les références [S77] et [CCK99] pour plus de détails.

Propriété 7
Tout sous-groupe fini de $\mathbf{SL}_2\mathbb{C}$ *est conjugué à l'un des groupes suivants :*
- A_n *(cyclique),* $n \geq 1$ $(|A_n| = n)$
- D_n *(diédral),* $n \geq 1$ $(|D_n| = 4n)$
- E_6 *(tétraédral)* $(|E_6| = 24)$
- E_7 *(octaédral)* $(|E_7| = 48)$
- E_8 *(icosaédral)* $(|E_8| = 120)$.

Propriété 8
Soit G *l'un des groupes de la liste précédente. L'anneau des invariants est*

$$\mathbb{C}[x, y]^G = \mathbb{C}[e_1, e_2, e_3] = \mathbb{C}[e_1, e_2] \oplus e_3\mathbb{C}[e_1, e_2] \simeq \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]/\langle f_1 \rangle,$$

où les invariants e_j *sont des polynômes homogènes, avec* e_1 *et* e_2 *algébriquement indépendants, et où* f_1 *est un polynôme quasi-homogène à singularité isolée en l'origine.*
Ces polynômes sont donnés dans le tableau suivant.

G	$e_1,\ e_2,\ e_3$	f_1	$\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]/\langle \partial_1 f_1,\ \partial_2 f_1,\ \partial_3 f_1 \rangle$
A_n	$e_1 = x^n$ $e_2 = y^n$ $e_3 = xy$	$-n(z_1 z_2 - z_3^n)$	$Vect(1, z_1, \ldots, z_3^{n-2})$ $\dim = n - 1$
D_n	$e_1 = x^2y^2$ $e_2 = x^{2n} + (-1)^n y^{2n}$ $e_3 = x^{2n+1}y + (-1)^{n+1}xy^{2n+1}$	$\lambda_n(4z_1^{n+1} + (-1)^{n+1}z_1 z_2^2 + (-1)^n z_3^2)$ avec $\lambda_n = 2n(-1)^{n+1}$	$Vect(1, z_2, z_1, \ldots, z_1^{n-1})$ $\dim = n + 1$
E_6	$e_1 = x^5y - xy^5$ $e_2 = 14y^4x^4 + x^8 + y^8$ $e_3 = 33y^8x^4 - y^{12} + 33y^4x^8 - x^{12}$	$4(z_3^2 - z_2^3 + 108z_1^4)$	$Vect(1, z_2, z_1, z_1z_2, z_1^2, z_1^2z_2)$ $\dim = 6$
E_7	$e_1 = 14y^4x^4 + x^8 + y^8$ $e_2 = -3y^{10}x^2 + 6y^6x^6 - 3y^2x^{10}$ $e_3 = -34x^5y^{13} - yx^{17} + 34y^5x^{13} + xy^{17}$	$8(3z_3^2 - 12z_2^3 + z_2z_1^3)$	$Vect(1, z_2, z_2^2, z_1, z_1z_2, z_1z_2^2, z_1^2)$ $\dim = 7$
E_8	$e_1 = x^{11}y + 11x^6y^6 - xy^{11}$ $e_2 = x^{20} - 228x^{15}y^5 + 494x^{10}y^{10} + 228x^5y^{15} + y^{20}$ $e_3 = x^{30} + 522x^{25}y^5 - 10\,005x^{20}y^{10} - 10\,005x^{10}y^{20} - 522x^5y^{25} + y^{30}$	$10(1\,728z_1^5 + z_2^3 - z_3^2)$	$Vect(z_1^i z_2^j)_{\substack{i=0\ldots3,\\ j=0\ldots1}}$ $\dim = 8$

On appelle surface de Klein l'hypersurface algébrique définie par $\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3 \ /\ f_1(\mathbf{z}) = 0\}$.

Théorème 9 *(Pichereau)*
On considère le crochet de Poisson défini sur $\mathbb{C}[z_1, z_1, z_3]$ *par*

$$\{\cdot\}_{f_1} = \partial_3 f_1\, \partial_1 \wedge \partial_2 + \partial_1 f_1\, \partial_2 \wedge \partial_3 + \partial_2 f_1\, \partial_3 \wedge \partial_1 = i_{df_1}(\partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \partial_3),$$

et on note $HP^*_{f_1}$ (resp. $HP^{f_1}_*$) la cohomologie (resp. l'homologie) de Poisson pour ce crochet. Sous les hypothèses précédentes, la cohomologie de Poisson $HP^*_{f_1}$ et l'homologie de Poisson $HP^{f_1}_*$ de $(\mathbb{C}[z_1,\, z_1,\, z_3]/\langle f_1\rangle,\ \{\cdot\}_{f_1})$ est donnée par

$$\begin{array}{l} HP^0_{f_1} = \mathbb{C}, \quad HP^1_{f_1} \simeq HP^2_{f_1} = \{0\} \\ HP^{f_1}_0 \simeq HP^{f_1}_2 \simeq \mathbb{C}[z_1,\, z_2,\, z_3]/\langle \partial_1 f_1,\ \partial_2 f_1,\ \partial_3 f_1\rangle \\ \dim(HP^{f_1}_1) = \dim(HP^{f_1}_0) - 1 \\ HP^{f_1}_j = HP^j_{f_1} = \{0\} \ si\ j \geq 3. \end{array}$$

L'algèbre $\mathbb{C}[x,\, y]$ est une algèbre de Poisson pour le crochet symplectique standard que l'on note $\{\cdot\}_{std}$. Comme G est un sous-groupe du groupe symplectique $\mathbf{Sp}_2\mathbb{C}$, l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[x,\, y]^G$ est une sous-algèbre de Poisson de $\mathbb{C}[x,\, y]$. La propriété suivante permet alors de déduire du théorème 9 la cohomologie de Poisson et l'homologie de Poisson de $\mathbb{C}[x,\, y]^G$ pour le crochet symplectique standard.

Propriété 10

L'isomorphisme d'algèbres associatives

$$\begin{array}{rcl} \pi : (\mathbb{C}[x,\, y]^G,\ \{\cdot\}_{std}) & \rightarrow & (\mathbb{C}[z_1,\, z_1,\, z_3]/\langle f_1\rangle,\ \{\cdot\}_{f_1}) \\ e_j & \mapsto & \overline{z_j} \end{array}$$

est un isomorphisme de Poisson.

Dans la suite, on va calculer la cohomologie de Hochschild de $\mathbb{C}[z_1,\, z_1,\, z_3]/\langle f_1\rangle$. On en déduira alors immédiatement la cohomologie de Hochschild de $\mathbb{C}[x,\, y]^G$, grâce à l'isomorphisme d'algèbres associatives π.

4.2 Description des espaces de cohomologie

• Dans ce cas, on change l'ordre des vecteurs de base : on prend $(\eta_1\eta_2,\ \eta_2\eta_3,\ \eta_3\eta_1)$ au lieu de $(\eta_1\eta_2,\ \eta_1\eta_3,\ \eta_2\eta_3)$. Les différents espaces du complexe sont alors donnés par

$$\begin{array}{l} \widetilde{T}(0) = A \\ \widetilde{T}(1) = A\eta_1 \oplus A\eta_2 \oplus A\eta_3 \\ \widetilde{T}(2) = Ab_1 \oplus A\eta_1\eta_2 \oplus A\eta_2\eta_3 \oplus A\eta_3\eta_1 \\ \widetilde{T}(3) = Ab_1\eta_1 \oplus Ab_1\eta_2 \oplus Ab_1\eta_3 \oplus A\eta_1\eta_2\eta_3 \\ \widetilde{T}(4) = Ab_1^2 \oplus Ab_1\eta_1\eta_2 \oplus Ab_1\eta_2\eta_3 \oplus Ab_1\eta_3\eta_1 \\ \widetilde{T}(5) = Ab_1^2\eta_1 \oplus Ab_1^2\eta_2 \oplus Ab_1^2\eta_3 \oplus Ab_1\eta_1\eta_2\eta_3 \end{array}$$

ie, dans le cas général, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\widetilde{T}(2p) = Ab_1^p \oplus Ab_1^{p-1}\eta_1\eta_2 \oplus Ab_1^{p-1}\eta_2\eta_3 \oplus Ab_1^{p-1}\eta_3\eta_1}$

et $\boxed{\widetilde{T}(2p+1) = Ab_1^p\eta_1 \oplus Ab_1^p\eta_2 \oplus Ab_1^p\eta_3 \oplus Ab_1^{p-1}\eta_1\eta_2\eta_3}$.

On a $\frac{\partial}{\partial \eta_1}(\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3) = 1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3 = \eta_2 \wedge \eta_3 \wedge 1$, donc $d^{(3)}_{\widetilde{T}}(\eta_1\eta_2\eta_3) = \frac{\partial f_1}{\partial z_1} b_1\eta_2\eta_3 + \frac{\partial f_1}{\partial z_2} b_1\eta_3\eta_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_3} b_1\eta_1\eta_2$.

Les matrices de $d_{\widetilde{T}}$ sont donc données par

$$Mat_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(d^{(1)}_{\widetilde{T}}) = \begin{pmatrix} \partial_{z_1} f_1 & \partial_{z_2} f_1 & \partial_{z_3} f_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall\ p \in \mathbb{N}^*,\ Mat_{\mathcal{B}_{2p},\mathcal{B}_{2p+1}}(d^{(2p)}_{\widetilde{T}}) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{z_2} f_1 & 0 & -\partial_{z_3} f_1 \\ 0 & -\partial_{z_1} f_1 & \partial_{z_3} f_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{z_2} f_1 & \partial_{z_1} f_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall\ p \in \mathbb{N}^*,\ Mat_{\mathcal{B}_{2p+1},\mathcal{B}_{2p+2}}(d^{(2p+1)}_{\widetilde{T}}) = \begin{pmatrix} \partial_{z_1} f_1 & \partial_{z_2} f_1 & \partial_{z_3} f_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{z_3} f_1 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{z_1} f_1 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{z_2} f_1 \end{pmatrix}.$$

• On en déduit

$H^0 = A$

$H^1 = \{g_1\eta_1+g_2\eta_2+g_3\eta_3 \ / \ (g_1,\, g_2,\, g_3) \in A^3 \text{ et } g_1\,\partial_{z_1}f_1+g_2\,\partial_{z_2}f_1+g_3\,\partial_{z_3}f_1 = 0\} \simeq \left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^3 \ / \ \mathbf{g}\cdot\nabla f_1 = 0 \right\}$

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{\{g_0 b_1+g_3\eta_1\eta_2+g_1\eta_2\eta_3+g_2\eta_3\eta_1 \ / \ (g_0,g_1,g_2\, g_3)\in A^4 \text{ et } g_3\,\partial_{z_2}f_1-g_2\,\partial_{z_3}f_1=g_1\,\partial_{z_3}f_1-g_3\,\partial_{z_1}f_1=g_2\,\partial_{z_1}f_1-g_1\,\partial_{z_2}f_1=0\}}{\{(g_1\,\partial_{z_1}f_1+g_2\,\partial_{z_2}f_1+g_3\,\partial_{z_3}f_1)b_1 \ / \ (g_1,g_2,g_3)\in A^3\}} \\
&\simeq \frac{\left\{ \mathbf{g}=\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^4 \Big/ \nabla f_1 \wedge \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}}{\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{g}\cdot\nabla f_1 \\ \mathbf{0}_{3,1} \end{pmatrix} \ / \ \mathbf{g}\in A^3 \right\}} \\
&\simeq \frac{A}{\langle \partial_{z_1}f_1,\ \partial_{z_2}f_1,\ \partial_{z_3}f_1\rangle_A} \oplus \{\mathbf{g} \in A^3 \ / \ \nabla f_1 \wedge \mathbf{g} = 0\}
\end{aligned}$$

$\forall\ p \geq 2,$

$$\begin{aligned}
H^{2p} &= \frac{\left\{ g_0 b_1^p+g_3 b_1^{p-1}\eta_1\eta_2+g_1 b_1^{p-1}\eta_2\eta_3+g_2 b_1^{p-1}\eta_3\eta_1 \Big/ \begin{matrix} (g_0,g_1,g_2\, g_3)\in A^4 \text{ et} \\ g_3\,\partial_{z_2}f_1-g_2\,\partial_{z_3}f_1=g_1\,\partial_{z_3}f_1-g_3\,\partial_{z_1}f_1=g_2\,\partial_{z_1}f_1-g_1\,\partial_{z_2}f_1=0 \end{matrix} \right\}}{\{(g_1\,\partial_{z_1}f_1+g_2\,\partial_{z_2}f_1+g_3\,\partial_{z_3}f_1)b_1^p+g_0(\partial_{z_3}f_1\, b_1^{p-1}\eta_1\eta_2+\partial_{z_1}f_1\, b_1^{p-1}\eta_2\eta_3+\partial_{z_2}f_1\, b_1^{p-1}\eta_3\eta_1) \ / \ (g_0,g_1,g_2,g_3)\in A^3\}} \\
&\simeq \frac{\left\{ \mathbf{g}=\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^4 \Big/ \nabla f_1 \wedge \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}}{\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{g}\cdot\nabla f_1 \\ g_0\,\partial_{z_1}f_1 \\ g_0\,\partial_{z_2}f_1 \\ g_0\,\partial_{z_3}f_1 \end{pmatrix} \ / \ \mathbf{g}\in A^3 \text{ et } g_0\in A \right\}} \\
&\simeq \frac{A}{\langle \partial_{z_1}f_1,\ \partial_{z_2}f_1,\ \partial_{z_3}f_1\rangle_A} \oplus \frac{\{\mathbf{g}\in A^3 \ / \ \nabla f_1\wedge\mathbf{g}=0\}}{\{g\nabla f_1 \ / \ g\in A\}}
\end{aligned}$$

$\forall\ p \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned}
H^{2p+1} &= \frac{\left\{ g_1 b_1^p\eta_1+g_2 b_1^p\eta_2+g_3 b_1^p\eta_3+g_0 b_1^{p-1}\eta_1\eta_2\eta_3 \Big/ \begin{matrix} (g_0,g_1,g_2\, g_3)\in A^4 \text{ et } g_1\,\partial_{z_1}f_1+g_2\,\partial_{z_2}f_1+g_3\,\partial_{z_3}f_1=0 \\ g_0\,\partial_{z_3}f_1=g_0\,\partial_{z_1}f_1=g_0\,\partial_{z_2}f_1=0 \end{matrix} \right\}}{\{(g_3\,\partial_{z_2}f_1-g_2\,\partial_{z_3}f_1)b_1^p\eta_1+(g_1\,\partial_{z_3}f_1-g_3\,\partial_{z_1}f_1)b_1^p\eta_2+(g_2\,\partial_{z_1}f_1-g_1\,\partial_{z_2}f_1)b_1^p\eta_3 \ / \ (g_1,g_2,g_3)\in A^3\}} \\
&\simeq \frac{\left\{ \mathbf{g}=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_0 \end{pmatrix} \in A^4 \Big/ \nabla f_1 \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ et } g_0\,\partial_{z_3}f_1=g_0\,\partial_{z_1}f_1=g_0\,\partial_{z_2}f_1=0 \right\}}{\left\{ \begin{pmatrix} \nabla f_1 \wedge \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ \mathbf{g}\in A^3 \right\}} \\
&\simeq \frac{\{\mathbf{g}\in A^3 \ / \ \nabla f_1\cdot\mathbf{g}=0\}}{\{\nabla f_1\wedge\mathbf{g} \ / \ \mathbf{g}\in A^3\}} \oplus \{g \in A \ / \ g\,\partial_{z_3}f_1 = g\,\partial_{z_1}f_1 = g\,\partial_{z_2}f_1 = 0\}.
\end{aligned}$$

Le paragraphe suivant va permettre d'expliciter ces espaces.

4.3 Calculs explicites dans le cas particulier où f_1 est à variables séparées

Dans ce paragraphe, on considère le polynôme $f_1 = a_1z_1^i + a_2z_2^j + a_3z_3^k$, avec $2 \leq i \leq j \leq k$ et $a_j \in \mathbb{C}^*$.

Les dérivées partielles de f_1 sont $\partial_1 f_1 = ia_1z_1^{i-1}$, $\partial_2 f_1 = ja_2z_2^{j-1}$ et $\partial_3 f_1 = ka_3z_3^{k-1}$.

• On a déjà

$$\boxed{H^0 = \mathbb{C}[z_1,\, z_2,\, z_3]/\langle a_1z_1^i + a_2z_2^j + a_3z_3^k\rangle}.$$

• De plus, comme f_1 est quasi-homogène, la formule d'Euler donne $\frac{1}{i} z_1 \partial_1 f_1 + \frac{1}{j} z_2 \partial_2 f_1 + \frac{1}{k} z_3 \partial_3 f_1 = f_1$. Ainsi, on a l'inclusion $\langle f_1 \rangle \subset \langle \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1,\, \partial_3 f_1 \rangle$, donc

$$\frac{A}{\langle \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1,\, \partial_3 f_1 \rangle_A} \simeq \frac{\mathbb{C}[z_1,\, z_2,\, z_3]}{\langle \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1,\, \partial_3 f_1 \rangle} \simeq Vect\left(z_1^p z_2^q z_3^r \ / \ p \in [\![0,\, i-2]\!],\ q \in [\![0,\, j-2]\!],\ r \in [\![0,\, k-2]\!]\right).$$

Enfin, comme $\partial_1 f_1$ et f_1 sont premiers entre eux, si $g \in A$ vérifie $g \partial_1 f_1 = 0 \mod \langle f_1 \rangle$, alors $g \in \langle f_1 \rangle$, ie g est nul dans A.

• On détermine maintenant l'ensemble $\left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^3 \ / \ \mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = 0 \right\}$:

On a d'abord $\langle f_1,\, \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1 \rangle = \langle a_1 z_1^i + a_2 z_2^j + a_3 z_2^k,\, z_1^{i-1},\, z_2^{j-1} \rangle = \langle z_1^{i-1},\, z_2^{j-1} z_3^k \rangle$. Les seuls monômes qui ne sont pas dans cet idéal sont donc les éléments $z_1^p z_2^q z_3^r$ avec $p \in [\![0,\, i-2]\!]$, $q \in [\![0,\, j-2]\!]$ et $r \in [\![0,\, k-1]\!]$. Ainsi tout polynôme $P \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ s'écrit sous la forme

$$P = \alpha f_1 + \beta \partial_1 f_1 + \gamma \partial_2 f_1 + \sum_{\substack{p=0\ldots i-2 \\ q=0\ldots j-2 \\ r=0\ldots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^q z_3^r.$$

Les polynômes $P \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ tels que $P \partial_3 f_1 \in \langle f_1,\, \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1 \rangle$ sont donc les éléments

$$P = \alpha f_1 + \beta \partial_1 f_1 + \gamma \partial_2 f_1 + \sum_{\substack{p=0\ldots i-2 \\ q=0\ldots j-2 \\ r=1\ldots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^q z_3^r.$$

On a ainsi calculé $Ann_{\langle f_1,\, \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1 \rangle}(\partial_3 f_1)$.
L'équation

$$\mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = 0 \mod \langle f_1 \rangle \tag{12}$$

entraîne $g_3 \in Ann_{\langle f_1,\, \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1 \rangle}(\partial_3 f_1)$, ie

$$g_3 = \alpha f_1 + \beta \partial_1 f_1 + \gamma \partial_2 f_1 + \sum_{\substack{p=0\ldots i-2 \\ q=0\ldots j-2 \\ r=1\ldots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^q z_3^r, \tag{13}$$

avec $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]^3$.
D'où

$$g_2 \partial_2 f_1 + \gamma \partial_2 f_1 \partial_3 f_1 + \sum_{\substack{p=0\ldots i-2 \\ q=0\ldots j-2 \\ r=1\ldots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^q z_3^r \partial_3 f_1 \in \langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle. \tag{14}$$

Donc d'après la formule d'Euler,

$$\partial_2 f_1 \left(g_2 + \gamma \partial_3 f_1 - \frac{k}{j} \sum_{\substack{p=0\ldots i-2 \\ q=0\ldots j-2 \\ r=1\ldots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^{q+1} z_3^{r-1} \right) \in \langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle. \tag{15}$$

Comme $Ann_{\langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle}(\partial_2 f_1) = \langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle$, cette équation équivaut à

$$g_2 = -\gamma \partial_3 f_1 + \frac{k}{j} \sum_{\substack{p=0\ldots i-2 \\ q=0\ldots j-2 \\ r=1\ldots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^{q+1} z_3^{r-1} + \delta f_1 + \varepsilon \partial_1 f_1,$$

avec $\delta,\, \varepsilon \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$. Il s'ensuit que

$$g_1\partial_1 f_1 + \beta\partial_1 f_1\partial_3 f_1 + \varepsilon\partial_1 f_1\partial_2 f_1 + \sum_{\substack{p=0\ldots i-2\\ q=0\ldots j-2\\ r=1\ldots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^q z_3^r \partial_3 f_1 + \frac{k}{j} \sum_{\substack{p=0\ldots i-2\\ q=0\ldots j-2\\ r=1\ldots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^{q+1} z_3^{r-1} \partial_3 f_1 \in \langle f_1 \rangle. \quad (16)$$

Et, d'après la formule d'Euler,

$$\partial_1 f_1 \left(g_1 + \beta\partial_3 f_1 + \varepsilon\partial_2 f_1 - \frac{k}{i} \sum_{\substack{p=0\ldots i-2\\ q=0\ldots j-2\\ r=1\ldots k-1}} a_{pqr} z_1^{p+1} z_2^q z_3^{r-1} \right) \in \langle f_1 \rangle. \quad (17)$$

Mais f_1 et $\partial_1 f_1$ sont premiers entre eux, donc

$$g_1 = -\beta\partial_3 f_1 - \varepsilon\partial_2 f_1 + \frac{k}{i} \sum_{\substack{p=0\ldots i-2\\ q=0\ldots j-2\\ r=1\ldots k-1}} a_{pqr} z_1^{p+1} z_2^q z_3^{r-1} + \eta f_1, \quad (18)$$

avec $\eta \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$.

Finalement

$$\left\{ \mathbf{g} \in A^3 \;/\; \mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \eta \\ \delta \\ \alpha \end{pmatrix} f_1 + \nabla f_1 \wedge \begin{pmatrix} -\gamma \\ \beta \\ -\varepsilon \end{pmatrix} + \sum_{\substack{p=0\ldots i-2\\ q=0\ldots j-2\\ r=1\ldots k-1}} a_{pqr} z_1^p z_2^q z_3^{r-1} \begin{pmatrix} \frac{k}{i} z_1 \\ \frac{k}{j} z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \;\Big/\; (\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta,\, \varepsilon,\, \eta) \in A^6 \text{ et } a_{pqr} \in \mathbb{C} \right\}.$$

On en déduit directement les espaces de cohomologie d'indices impairs :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \forall\, p \geq 1,\; H^{2p+1} & \simeq & \mathbb{C}^{(i-1)(j-1)(k-1)} \\ H^1 & \simeq & \nabla f_1 \wedge \left(\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f_1 \rangle\right)^3 \oplus \mathbb{C}^{(i-1)(j-1)(k-1)}. \end{array}}$$

Remarque :
On a aussi $\nabla f_1 \wedge \left(\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f_1 \rangle\right)^3 \simeq \left(\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f_1 \rangle\right)^3 \;/\; \{\mathbf{g} \;/\; \nabla f_1 \wedge \mathbf{g} = 0\} = \left(\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f_1 \rangle\right)^3 \;/\; (\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f_1 \rangle)\nabla f_1$.
De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f_1 \rangle)^2 & \to & \nabla f_1 \wedge \left(\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f_1 \rangle\right)^3 \\ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \nabla f_1 \wedge \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

est injective, donc $\boxed{\nabla f_1 \wedge \left(\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f_1 \rangle\right)^3 \text{ est de dimension infinie}}$.

- Il reste à déterminer l'ensemble $\left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^3 \;/\; \nabla f_1 \wedge \mathbf{g} = 0 \right\}$:

Soit $\mathbf{g} \in A^3$ tel que $\nabla f_1 \wedge \mathbf{g} = 0$. Cela signifie que, modulo $\langle f_1 \rangle$, $\mathbf{g}$ vérifie le système $\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_2 f_1\, g_3 - \partial_3 f_1\, g_2 & = & 0 \\ \partial_3 f_1\, g_1 - \partial_1 f_1\, g_3 & = & 0 \\ \partial_1 f_1\, g_2 - \partial_2 f_1\, g_1 & = & 0 \end{array} \right.$
La première équation donne, modulo $\langle f_1,\, \partial_2 f_1 \rangle$, $\partial_3 f_1\, g_2 = 0$.
Or $Ann_{\langle f_1,\, \partial_2 f_1 \rangle}(\partial_3 f_1) = \langle f_1,\, \partial_2 f_1 \rangle$, donc $g_2 = 0$, donc $g_2 = \alpha f_1 + \beta\partial_2 f_1$.
Donc

$$\partial_2 f_1 (g_3 - \beta\partial_3 f_1) = 0 \mod \langle f_1 \rangle,$$

ie $g_3 = \gamma f_1 + \beta \partial_3 f_1$.
Enfin, on obtient

$$\partial_3 f_1 (g_1 - \beta \partial_1 f_1) = 0 \mod \langle f_1 \rangle,$$

ie $g_1 = \delta f_1 + \beta \partial_1 f_1$.

Ainsi, $\{\mathbf{g} \in A^3 \ / \ \nabla f_1 \wedge \mathbf{g} = 0\} = \left\{ f_1 \begin{pmatrix} \delta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + \beta \nabla f_1 \ / \ \alpha, \, \beta, \, \gamma, \, \delta \in A \right\}$.

On en déduit les espaces de cohomologie d'indices pairs :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \forall \, p \geq 2, \ H^{2p} & \simeq & A \ / \ \langle \partial_1 f_1, \, \partial_2 f_1, \, \partial_3 f_1 \rangle \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^{i-1}, \, z_2^{j-1}, \, z_3^{k-1} \rangle \\ & \simeq & Vect \left(z_1^p z_2^q z_3^r \ / \ p \in [\![0, \, i-2]\!], \ q \in [\![0, \, j-2]\!], \ r \in [\![0, \, k-2]\!] \right) \simeq \mathbb{C}^{(i-1)(j-1)(k-1)} \\ H^2 & \simeq & \{\beta \nabla f_1 \ / \ \beta \in A\} \oplus \mathbb{C}^{(i-1)(j-1)(k-1)} \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle a_1 z_1^i + a_2 z_2^j + a_3 z_3^k \rangle \oplus \mathbb{C}^{(i-1)(j-1)(k-1)}. \end{array}}$$

Remarque 11
On obtient en particulier la cohomologie pour les cas où $f_1 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^{k+1}$, $f_1 = z_1^2 + z_2^3 + z_3^4$ *et* $f_1 = z_1^2 + z_2^3 + z_3^5$, *cas qui correspondent respectivement aux types* A_k, E_6 *et* E_8 *des surfaces de Klein.*

Le tableau suivant résume les résultats pour ces trois cas particuliers :

	H^0	H^1	H^2	H^{2p}	H^{2p+1}
A_k	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^2 + z_2^2 + z_3^{k+1} \rangle$	$\nabla f_1 \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle f_1 \rangle)^3 \oplus \mathbb{C}^k$	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^2 + z_2^2 + z_3^{k+1} \rangle \oplus \mathbb{C}^k$	$\mathbb{C}^k$	$\mathbb{C}^k$
E_6	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^2 + z_2^3 + z_3^4 \rangle$	$\nabla f_1 \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle f_1 \rangle)^3 \oplus \mathbb{C}^6$	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^2 + z_2^3 + z_3^4 \rangle \oplus \mathbb{C}^6$	$\mathbb{C}^6$	$\mathbb{C}^6$
E_8	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 \rangle$	$\nabla f_1 \wedge (\mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle f_1 \rangle)^3 \oplus \mathbb{C}^8$	$\mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 \rangle \oplus \mathbb{C}^8$	$\mathbb{C}^8$	$\mathbb{C}^8$

Les cas où $f_1 = z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k-1}$ et $f_1 = z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3$, ie respectivement D_k et E_7 sont étudiés dans le paragraphe suivant.

4.4 Calculs explicites pour D_k et E_7

4.4.1 Cas de $f_1 = z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k-1}$, ie D_k

Dans ce paragraphe, on considère le polynôme $f_1 = z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k-1}$.
Les dérivées partielles de f_1 sont $\partial_1 f_1 = 2z_1$, $\partial_2 f_1 = 2z_2 z_3$ et $\partial_3 f_1 = z_2^2 + (k-1) z_3^{k-2}$.

• On a déjà

$$\boxed{H^0 = \mathbb{C}[\mathbf{z}] / \langle z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k-1} \rangle.}$$

• De plus, comme f_1 est quasi-homogène, la formule d'Euler donne

$$\frac{k-1}{2} z_1 \, \partial_1 f_1 + \frac{k-2}{2} z_2 \, \partial_2 f_1 + z_3 \, \partial_3 f_1 = (k-1) f_1. \tag{19}$$

Ainsi, on a l'inclusion $\langle f_1 \rangle \subset \langle \partial_1 f_1, \, \partial_2 f_1, \, \partial_3 f_1 \rangle$.
De plus, une base de Gröbner de $\langle \partial_1 f_1, \, \partial_2 f_1, \, \partial_3 f_1 \rangle$ est $[z_3^{k-1}, \ z_2 z_3, \ z_2^2 + (k-1) z_3^{k-2}, \ z_1]$, donc

$$\frac{A}{\langle \partial_1 f_1, \, \partial_2 f_1, \, \partial_3 f_1 \rangle_A} \simeq \frac{\mathbb{C}[z_1, \, z_2, \, z_3]}{\langle \partial_1 f_1, \, \partial_2 f_1, \, \partial_3 f_1 \rangle} \simeq Vect \left(z_2, \, 1, \, z_3, \ldots, \, z_3^{k-2} \right).$$

Enfin, comme $\partial_1 f_1$ et f_1 sont premiers entre eux, si $g \in A$ vérifie $g \partial_1 f_1 = 0 \mod \langle f_1 \rangle$, alors $g \in \langle f_1 \rangle$, ie g est nul dans A, donc $\{g \in A \ / \ g \, \partial_{z_3} f_1 = g \, \partial_{z_1} f_1 = g \, \partial_{z_2} f_1 = 0\} = 0$.

• On détermine maintenant l'ensemble $\left\{ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \in A^3 \ / \ \mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = 0 \right\}$:

Une base de Gröbner de $\langle f_1,\, \partial_1 f_1,\, \partial_3 f_1\rangle$ est $[z_1,\ z_3^{k-1},\ z_2^2 + (k-1) z_3^{k-2}]$, donc une base de $\mathbb{C}[\mathbf{z}] \,/\, \langle f_1,\, \partial_1 f_1,\, \partial_3 f_1\rangle$ est $\{z_2^i z_3^j \ / \ i \in \{0,\,1\},\ j \in [\![0,\, k-2]\!]\}$.

On a déjà résolu l'équation $p\,\partial_2 f_1$ dans cet espace ; sa solution est $p = a_{0,k-2} z_3^{k-2} + \sum_{j=0}^{k-2} a_{1,j} z_2 z_3^j$.

L'équation

$$\mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = 0 \mod \langle f_1 \rangle \tag{20}$$

entraîne

$$g_2 \partial_2 f_1 = 0 \mod \langle f_1,\, \partial_1 f_1,\, \partial_3 f_1 \rangle, \tag{21}$$

d'où

$$g_2 = \alpha f_1 + \beta \partial_1 f_1 + \gamma \partial_3 f_1 + a z_3^{k-2} + \sum_{j=0}^{k-2} b_j z_2 z_3^j, \tag{22}$$

avec $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]^3$.
Et

$$g_3 \partial_3 f_1 + \gamma \partial_3 f_1 \partial_2 f_1 + a z_3^{k-2} \partial_2 f_1 + \sum_{j=0}^{k-2} b_j z_2 z_3^j \partial_2 f_1 \in \langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle. \tag{23}$$

Or d'après la formule d'Euler (19) et l'égalité

$$z_3^{k-1} z_2 = \frac{1}{2-k} \left(z_2 f_1 - z_2 z_3 \partial_3 f_1 - \frac{1}{2} z_2 z_1 \partial_1 f_1 \right) = -\frac{1}{2-k} z_2 z_3 \partial_3 f_1 \mod \langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle, \tag{24}$$

l'équation (23) devient

$$\partial_3 f_1 \left(g_3 + \gamma \partial_2 f_1 - \frac{2a}{2-k} z_2 z_3 - \sum_{j=0}^{k-2} b_j \frac{2}{2-k} z_3^{j+1} \right) \in \langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle. \tag{25}$$

Comme $Ann_{\langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle}(\partial_3 f_1) = \langle f_1,\, \partial_1 f_1 \rangle$, cette équation équivaut à

$$g_3 = -\gamma \partial_2 f_1 + \frac{2a}{2-k} z_2 z_3 + \sum_{j=0}^{k-2} b_j \frac{2}{2-k} z_3^{j+1} + \delta f_1 + \varepsilon \partial_1 f_1,$$

avec $\delta,\, \varepsilon \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$.
On trouve

$$g_1 = -\beta \partial_2 f_1 - \varepsilon \partial_3 f_1 + \sum_{j=0}^{k-2} b_j \frac{k-1}{k-2} z_1 + \frac{a}{2-k} z_2 z_1 + \eta f_1, \tag{26}$$

avec $\eta \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$.

Finalement, on a

$$\left\{ \mathbf{g} \in A^3 \ / \ \mathbf{g} \cdot \nabla f_1 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \eta \\ \alpha \\ \delta \end{pmatrix} f_1 + \nabla f_1 \wedge \begin{pmatrix} \gamma \\ \varepsilon \\ -\beta \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{k-2} b_j \begin{pmatrix} \frac{k-1}{k-2} z_1 z_3^j \\ z_2 z_3^j \\ -\frac{2}{2-k} z_3^{j+1} \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \frac{1}{2-k} z_2 z_1 \\ z_3^{k-2} \\ \frac{2a}{2-k} z_2 z_3 \end{pmatrix} \ \Big/ \ (\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta,\, \varepsilon,\, \eta) \in A^6 \text{ et } a,\, b_j \in \mathbb{C} \right\},$$

ainsi que les espaces de cohomologie d'indices impairs :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \forall\, p \geq 1,\ H^{2p+1} & \simeq & \mathbb{C}^k \\ H^1 & \simeq & \nabla f_1 \wedge \left(\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f_1 \rangle\right)^3 \oplus \mathbb{C}^k. \end{array}}$$

• Pour montrer que $\{\mathbf{g} \in A^3 \ / \ \nabla f_1 \wedge \mathbf{g} = 0\} = \left\{f_1\, \mathbf{g} + \beta \nabla f_1 \ / \ \mathbf{g} \in A^3,\ \beta \in A\right\}$, on procède comme dans le cas des variables séparées.
On en déduit, en utilisant le premier point •, les espaces de cohomologie d'indices pairs :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \forall\, p \geq 2,\ H^{2p} & \simeq & A \ / \ \langle \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1,\, \partial_3 f_1 \rangle \simeq Vect\left(z_2,\, 1,\, z_3, \ldots,\, z_3^{k-2}\right) \simeq \mathbb{C}^k \\ H^2 & \simeq & \{\beta\, \nabla f_1 \ / \ \beta \in A\} \oplus \mathbb{C}^k \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k-1} \rangle \oplus \mathbb{C}^k. \end{array}}$$

4.4.2 Cas de $f_1 = z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3$, ie E_7

Ici, on a $\partial_1 f_1 = 2z_1,\ \partial_2 f_1 = 3z_2^2 + z_3^3$ et $\partial_3 f_1 = 3z_2 z_3^2$.
La méthode de démonstration est analogue à celle des cas précédents.
Une base de Gröbner de $\langle \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1,\, \partial_3 f_1 \rangle$ est $[z_3^5,\ z_2 z_3^2,\ 3z_2^2 + z_3^3,\ z_1]$.
De même, une base de Gröbner de $\langle f_1,\, \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1 \rangle$ est $[z_3^6,\ z_2 z_3^3,\ 3z_2^2 + z_3^3,\ z_1]$.
On obtient les résultats suivants :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \forall\, p \geq 1,\ H^{2p+1} & \simeq & \mathbb{C}^7 \\ H^1 & \simeq & \nabla f_1 \wedge \left(\mathbb{C}[\mathbf{z}]/\langle f_1 \rangle\right)^3 \oplus \mathbb{C}^7. \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} H^0 & = & \mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3 \rangle \\ \forall\, p \geq 2,\ H^{2p} & \simeq & A \ / \ \langle \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1,\, \partial_3 f_1 \rangle \simeq Vect\left(z_2,\, z_2^2,\, 1,\, z_3,\, z_3^2,\, z_3^3,\, z_3^4\right) \simeq \mathbb{C}^7 \\ H^2 & \simeq & \{\beta\, \nabla f_1 \ / \ \beta \in A\} \oplus \mathbb{C}^k \simeq \mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3 \rangle \oplus \mathbb{C}^7. \end{array}}$$

Remarque 12
Dans tous les cas étudiés précédemment, il existe un triplet $(i,\, j,\, k)$ tel que $\{i,\, j,\, k\} = \{1,\, 2,\, 3\}$, et tel que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle \partial_1 f_1,\, \partial_2 f_1,\, \partial_3 f_1 \rangle & \to & \{\textit{Solutions dans } \mathbb{C}[\mathbf{z}] \ / \ \langle f_1,\, \partial_j f_1,\, \partial_k f_1 \rangle \textit{ de l'équation } g\, \partial_i f_1 = 0\} \\ P & \mapsto & z_i\, P \mod \langle f_1,\, \partial_j f_1,\, \partial_k f_1 \rangle \end{array}$$

soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Références

[AL98] Jacques Alev, Thierry Lambre, *Comparaison de l'homologie de Hochschild et de l'homologie de Poisson pour une déformation des surfaces de Klein.* In Algebra and operator theory (Tashkent, 1997), pp. 25-38. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[AVGZ86] V. Arnold, A. Varchenko, S. Goussein-Zadé, *Singularités des applications différentiables*, première partie, éditions Mir, Moscou, 1986.

[BCKT05] Alain Bruguières, Alberto Cattaneo, Bernhard Keller, Charles Torossian, *Déformation, Quantification, Théorie de Lie*, Panoramas et Synthèses, SMF, 2005.

[BFFLS78] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization. I and II. Physical applications*, Ann. Physics **111**, no. 1, p. 61-110 and 111-151, 1978.

[CBH98] William Crawley-Boevey, Martin P. Holland, *Noncommutative Deformations of Kleinian Singularities*, Duke Mathematical Journal, Vol. 92, No. 3, 1998.

[CCK99] Li Chiang, Huah Chu, Ming-chang Kang, *Generation of Invariants*, Journal of Algebra, Volume 221, Issue 1, pp. 232-241, 1999.

[FK07] Christian Fronsdal, avec un appendice de Maxim Kontsevich, *Quantization on Curves*, Math-ph/0507021. Lett. Math. Phys. 79, pp. 109-129, 2007.

[GRS07] Laurent Guieu, Claude Roger, avec un appendice de Vlad Sergiescu, *L'Algèbre et le Groupe de Virasoro : aspects géométriques et algébriques, généralisations*, Publication du Centre de Recherches Mathématiques de Montréal, série "Monographies, notes de cours et Actes de conférences", PM28, 2007.

[K97] Maxim Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, Preprint IHES, arXiv : q-alg/9709040, 1997.

[L98] Jean-Louis Loday, *Cyclic homology*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.

[P05] Anne Pichereau, *Cohomologie de Poisson en dimension trois*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340, 2005.

[P06] Anne Pichereau, *Poisson (co)homology and isolated singularities*, Journal of Algebra, Volume 299, Issue 2, pp. 747-777, 2006.

[RSP02] Eric Rannou, Philippe Saux-Picart, *Cours de calcul formel*, partie II, éditions Ellipses, 2002.

[RV02] Claude Roger, Pol Vanhaecke, *Poisson cohomology of the affine plane*. Journal of Algebra, Volume 251, Issue 1, pp. 448-460, 2002.

[S77] T. A. Springer, *Invariant theory*, Lecture Notes in Math., **585**, Springer-Verlag, 1977.

[VB94] Michel Van den Bergh, *Noncommutative homology of some three-dimensional quantum spaces*. Proceedings of Conference on Algebraic Geometry and Ring Theory in honor of Michael Artin, Part III (Antwerp, 1992), volume 8, pp. 213-230, 1994.